

Método dos mínimos quadrados na utilização de curvas momento-rotação na análise de pórticos planos semirrígidos**Minimum squares method in the use of rotation moment curves in the analysis of semi-rigited plane frames**

Everton Luis Consoni da Silva¹ , Luiz Antonio Farani de Souza², Paulo Henrique de Freitas Meirelles¹, Wilson Wesley Wutzow¹

¹Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Av. Colombo, 5790, Campus Universitário, Bloco C67, Pavimento Térreo, Sala 002, 87020-900, Maringá, PR, Brasil.

²Universidade Tecnológica Federal do Paraná. R. Marcílio Dias, 635, Jardim Paraíso, 86812-460, Apucarana, PR, Brasil.
e-mail: pg403386@uem.br, lasouza@utfpr.edu.br, pg403395@uem.br, www.wutzow@uem.br

RESUMO

Usualmente, no desenvolvimento de projetos, adota-se que o comportamento das ligações viga-pilar do sistema estrutural é idealizado por meio de dois extremos: as ligações flexíveis em que nenhum momento é transmitido entre o pilar e a viga e esses elementos se comportam independentemente; e as ligações totalmente rígidas nas quais ocorre a transmissão total do momento. Entretanto, nas estruturas reais, investigações experimentais têm demonstrado que a maioria das conexões devem ser tratadas como ligações semirrígidas. Esse comportamento é descrito por intermédio de curvas momento-rotação, que, por sua vez, devem ser incorporadas à análise estrutural para que se obtenha informações mais precisas sobre o desempenho da conexão. Para tanto, este artigo apresenta a aplicação do método dos Mínimos Quadrados para a simulação do comportamento semirrígido de ligações de pórticos planos metálicos, por intermédio do acoplamento com um modelo numérico-computacional para predição de pórticos com comportamento não linear geométrico e ligações semirrígidas. Para tanto, utiliza-se a formulação Corrotacional de Elementos Finitos, considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli. A ligação entre os membros estruturais é simulada por um elemento híbrido. O sistema de equações não lineares é solucionado pelo procedimento incremental-iterativo de Potra-Pták, associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Cilíndrico. Quatro estruturas encontradas na literatura são analisadas com o código computacional desenvolvido, em que é possível verificar que o método proposto apresentou bons resultados numéricos quanto à obtenção do caminho de equilíbrio da estrutura considerando a deterioração da ligação.

Palavras-chave: Ligações semirrígidas; Formulação Corrotacional; Método de Potra-Pták; Comprimento de Arco Cilíndrico.

ABSTRACT

Usually, in the development of projects, it is assumed that the behavior of the connections between the beam-column of the system is idealized through two extremes: the flexible connections in which no moment is transmitted between the column and the beam and these elements are behave independently; and the fully rigid connections in which full moment transmission occurs. However, in real structures, experimental investigations have shown that most connections should be treated as semi-rigid connections. This behavior is described by means of moment-rotation curves, which, in turn, must be incorporated into the structural analysis in order to obtain more accurate information about the performance of the connection. Therefore, this article presents the application of the method of Ordinary Least Squares for the simulation of the semi-rigid behavior of connections of metallic plane optics. Through coupling with a numerical-computational model for prediction of frames with geometric nonlinear behavior and semi-rigid connections. For this purpose, the Corrotational Finite Element formulation is used, considering the Euler-Bernoulli beam theory. The connection between the structural members is simulated by a hybrid element. The system of nonlinear equations is solved by the incremental-iterative procedure of Potra Pták, associated with the Cylindrical Arc Length technique. Four structures found in the literature are analyzed, when

compared, it is possible to affirm that the proposed method presented excellent results, faithfully representing the equilibrium path of the structure considering the deterioration of the connection.

Keywords: Semi-rigid connections; Corrotational Formulation; Potra-Pták Method; Co-rotational formulation.

1. INTRODUÇÃO

No dimensionamento estrutural, o objetivo é definir os componentes do sistema que apresentem uma melhor estabilidade e capacidade resistente, a fim de atender às solicitações na análise de estruturas. Dessa forma, o desenvolvimento de novos materiais, técnicas construtivas, a disponibilidade de recursos computacionais e os de fatores econômicos têm motivado o emprego de elementos estruturais cada vez mais otimizados [1].

Nesse quesito, estruturas metálicas são uma excelente solução estrutural para os mais variados tipos de construções. Sua concepção compõe uma estrutura esbelta, leve, econômica, eficiente e de rápida montagem [2]. Devido à alta esbelteza dos elementos, a resposta da estrutura de aço é basicamente não linear. Dessa forma, os efeitos da não linearidade geométrica e da flexibilidade das ligações viga-pilar devem ser considerados para obtenção de uma resposta mais fidedigna possível.

O comportamento semirrígido da ligação é descrito por intermédio de curvas momento-rotação, que, por sua vez, devem ser incorporadas à análise estrutural para que se obtenha informações mais precisas sobre o desempenho da conexão. Com o intuito de incorporar curvas momento-rotação de forma mais sistemática e eficiente na análise computacional, geralmente, são utilizados modelos baseados em funções matemáticas. Exemplos incluem o modelo de RICHARD e ABBOTT [3] o modelo de potência de COLSON e LOUVEAU [4], o modelo exponencial de CHEN e LUI [5]. No entanto, em alguns casos, esses modelos não conseguem representar fielmente o comportamento da conexão estudada, devido os mesmos terem sido calibrados a partir de um número finito de dados.

Dessa forma, com o intuito de obter análises cada vez mais realistas e condizentes, diversos pesquisadores buscam formas de uma melhor representação e incorporação da curva momento-rotação nas análises. Em AHMED [6] uma formulação baseada em três mecanismos de falha simples considerando deformações de flexão e cisalhamento é desenvolvida. ZHOU *et al.* [7] propõem um modelo analítico prático para a relação momento-rotação. Esse modelo exponencial é composto de dois parâmetros baseados na resistência ao momento último e na rigidez rotacional inicial.

ADEOTI *et al.* [8] apresentam um modelo polinomial de quarta ordem para representar o comportamento momento-rotação da ligação. TRAN e KIM [9] propõem um novo modelo híbrido, que é obtido pela integração de redes neurais artificiais para prever o comportamento momento-rotação ($M-\theta$). SOUZA *et al.* [10] desenvolvem um modelo constitutivo unidimensional de ligação fundamentado na Mecânica do Dano Contínuo, o qual leva em conta a redução progressiva da rigidez rotacional. Entretanto, os métodos supramencionados em sua maioria possuem alta complexidade, necessitam de vários parâmetros, apresentam formulações amplamente extensas e são adequados apenas para certos tipos de ligação.

Nesse sentido, esse artigo visa apresentar um modelo simples e de fácil implementação, que se baseia na aplicação do método de ajuste de curva dos Mínimos Quadrados descrito no trabalho de DATTA [11]. A partir da inserção dos pontos que correspondem às curvas momento-rotação de cada tipo de ligação, é possível obter uma função que determinará a rigidez a cada nova iteração. Uma vez que extensivos testes com vários tipos de conexão têm sido realizados nas últimas décadas, muitos dados curvas momento-rotação estão disponíveis e podem ser usados para simular uma vasta gama de ligações. Para a descrição cinemática é utilizada a formulação Corrotacional descrita em YAW [12], em que o elemento finito de viga-pilar é fundamentado na teoria de viga de Euler – Bernoulli. A solução do problema estrutural é obtida por meio do procedimento incremental-iterativo de POTRA e PTÁK [13] juntamente com a técnica de continuação Comprimento de Arco Cilíndrico posposto por CRISFIELD [14] e iterativo do comprimento de arco linear CRISFIELD [15]. Resultados numéricos obtidos a partir da aplicação do método são comparados com estudos existentes para ilustrar a precisão e a eficiência do método proposto.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Para o desenvolvimento da metodologia proposta são apresentados: o elemento finito de viga – pilar no contexto da formulação Corrotacional do Método dos Elementos Finitos (MEF), considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli para a flexão; o elemento finito de ligação híbrido; a aplicação do método dos Mínimos Quadrados adaptado para prever a rigidez rotacional da ligação a cada iteração; e, por fim, o procedimento incremental-iterativo para a solução do sistema de equações não lineares que descreve o problema estrutural.

2.1. Formulação corrotacional da viga de Euler-Bernoulli

A formulação Corrotacional do MEF para o elemento de viga-pilar 2D descrita em YAW [12], com dois nós e três graus de liberdade por nó, é descrita a seguir. Considere o elemento de viga-pilar em suas configurações inicial e corrente, conforme o desenho esquemático na Figura 1. Assume-se a cinemática de Euler-Bernoulli, portanto, não há deformação de cisalhamento no elemento e, então, a seção transversal permanece plana e normal ao eixo da mesma.

Conforme há mudança na configuração estrutural devido a deslocamentos, o elemento de barra passa a ter novas coordenadas. Na configuração de referência inicial, o comprimento inicial (L_0) pode ser obtido por meio das coordenadas dos nós, em que X_1 e Y_1 são os nós iniciais e X_2 e Y_2 são os nós finais de cada elemento representados no plano cartesiano, de acordo com a Equação (1).

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \quad (1)$$

E conforme o deslocamento é possível a cada novo incremento de carga determinar o comprimento final L de cada barra por meio da Equação (2), em que, u_{1-2} e v_{1-2} são, respectivamente, os deslocamentos nodais do referencial global na direção x e y .

$$L = \sqrt{((X_2 + u_2) - (X_1 + u_1))^2 + ((Y_2 + v_2) - (Y_1 + u_1))^2} \quad (2)$$

O vetor de deslocamento globais $\mathbf{p}$ do elemento i é dado na Equação (3).

$$\mathbf{p}_i = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T \quad (3)$$

O deslocamento axial local (u_1) do elemento é calculado conforme a Equação (4).

$$u_1 = L - L_0 \quad (4)$$

Entretanto, se a diferença entre L e L_0 for pequena, a Equação (4) se torna mal condicionada para uso em uma configuração numérica. Portanto, CRISFIELD [15] propõe a multiplicação de u_1 por $(L + L_0) / (L + L_0)$ o que resulta em uma fórmula melhor condicionada e descrita na Equação (5).

$$u_1 = \frac{(L - L_0)(L + L_0)}{L + L_0} = \frac{L^2 - L_0^2}{L + L_0} \quad (5)$$

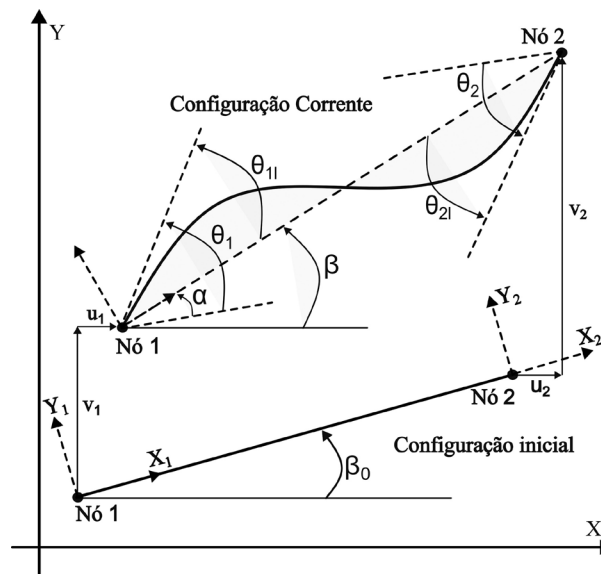


Figura 1: Configuração inicial e corrente na cinemática corrotacional. Fonte: Adaptado de YAW [12].

A deformação específica e é assumida constante e é determinada por $\varepsilon = u_1/L_0$. A força axial (N) da viga é então exposta conforme Equação (6).

$$N = \frac{EAu_1}{L_0} = \frac{EA(L^2 - L_0^2)}{LL_0 + L_0^2} = \frac{EA\left(\frac{L^2}{L_0} - 1\right)}{\frac{L}{L_0} + 1} \quad (6)$$

Em que A é a área da seção transversal e E é o módulo de Young. Dispondo da análise estrutural padrão, os momentos locais nas extremidades do elemento de viga ($\bar{M}_1$ e $\bar{M}_2$) são relacionados com as rotações nodais locais (θ_{11} e θ_{21}), conforme Equação (7).

$$\begin{Bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L_0} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Na qual I é o momento de inércia da seção transversal. As rotações nodais locais θ_{11} e θ_{21} são computadas pelas Equações (8) e (9), respectivamente.

$$\theta_{11} = \arctan \left(\frac{\cos\beta \sin\beta_1 - \sin\beta \cos\beta_1}{\cos\beta \sin\beta_1 + \sin\beta \sin\beta_1} \right) \quad (8)$$

$$\theta_{21} = \arctan \left(\frac{\cos\beta \sin\beta_2 - \sin\beta \cos\beta_2}{\cos\beta \sin\beta_2 + \sin\beta \sin\beta_2} \right) \quad (9)$$

Em que β_1 e β_2 são representados pelas Equações (10) e (11), respectivamente.

$$\beta_1 = \theta_1 + \beta_0 \quad (10)$$

$$\beta_2 = \theta_2 + \beta_0 \quad (11)$$

Os ângulos θ_1 e θ_2 são as rotações nodais globais calculadas do sistema de equações globais, e as expressões para os ângulos inicial β_0 Equação (12) e corrente da barra β Equação (13).

$$\beta_0 = \arctan \left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right) \quad (12)$$

$$\beta = \arctan \left(\frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{X_2 + u_2 - X_1 - u_1} \right) \quad (13)$$

A matriz de rigidez tangente elementar $\mathbf{K}_{el}$, Equação (14), é determinada em função da parcela da matriz de rigidez dependente do material $\mathbf{K}_M$, Equação (15) e da matriz de rigidez geométrica ou das tensões iniciais $\mathbf{K}_G$, Equação (16).

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_G = \frac{N}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T) \quad (16)$$

Na qual $\mathbf{D}$ é a matriz constitutiva dada pela Equação (17).

$$\mathbf{D} = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2 & 2r^2 \\ 0 & 2r^2 & 4r^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Em que $r = \sqrt{I/A}$ é o raio de giração, os vetores $\mathbf{z}$ e $\mathbf{r}$ são, determinados nas Equações (18) e (19), respectivamente.

$$\mathbf{z} = [\sin(\beta) \quad -\cos(\beta) \quad 0 \quad -\sin(\beta) \quad \cos(\beta) \quad 0]^T \quad (18)$$

$$\mathbf{r} = [-\cos(\beta) \quad -\sin(\beta) \quad 0 \quad -\cos(\beta) \quad \sin(\beta) \quad 0]^T \quad (19)$$

E a matriz $\mathbf{B}$ representada na Equação (20).

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta)/L & \cos(\beta)/L & 1 & \sin(\beta)/L & -\cos(\beta)/L & 0 \\ -\sin(\beta)/L & \cos(\beta)/L & 0 & \sin(\beta)/L & -\cos(\beta)/L & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

As Equações (21) e (22) são utilizadas para calcular os valores do seno e cosseno do ângulo β , respectivamente.

$$\cos(\beta) = \frac{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}{L} \quad (21)$$

$$\sin(\beta) = \frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{L} \quad (22)$$

O vetor de forças internas ($\mathbf{f}_{int}$) do elemento finito é determinado pela Equação (23).

$$\mathbf{f}_{int} = \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} N & \bar{M}_1 & \bar{M}_2 \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

2.2. Análise de ligação semirrígida

Inicialmente, para a análise de pórticos com conexões semirrígidas, é necessário primeiramente conhecer e modelar o comportamento da ligação. Matematicamente elas podem ser descritas, de uma forma geral, por intermédio da relação estabelecida na Equação (24).

$$M = f(\theta_r) \quad (24)$$

Ou inversamente na Equação (25).

$$\theta_r = g(M) \quad (25)$$

Em que f e g representam funções matemáticas, M representa o momento atuante na ligação e θ_r representa a rotação relativa ou capacidade de rotação. A rigidez da ligação k_1 e k_2 correspondem a inclinação da reta tangente à curva momento-rotação calculada pelas Equações (26) e (27), respectivamente.

$$k_1 = \frac{M_A}{\theta_{rA}} \quad (26)$$

$$k_2 = \frac{M_B}{\theta_{rB}} \quad (27)$$

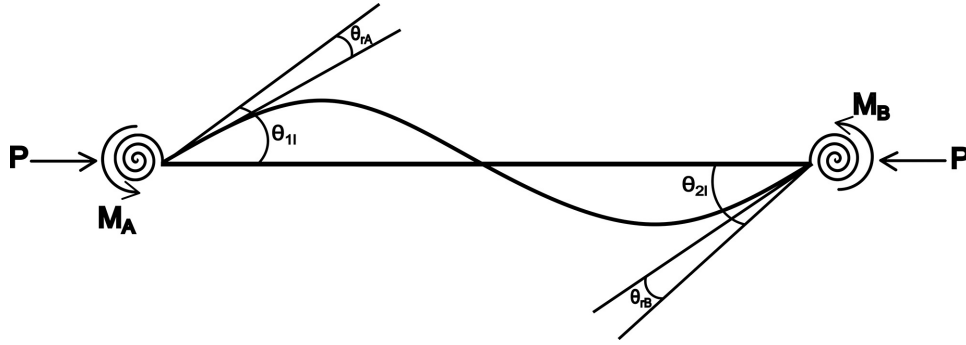


Figura 2: Viga com ligações semirrígidas. Fonte: Adaptada de DEGERTEKIN e HAYALIOGLU [16].

A semirrígidez de uma viga pode ser representada por molas rotacionais inseridas na extremidade de cada elemento finito, conforme exposta na Figura 2.

Substituindo θ_{11} e θ_{21} da Equação (7) por $(\theta_{11} - \theta_{rA})$ e $(\theta_{21} - \theta_{rB})$ pode-se obter as relações entre as rotações e momentos finais são expressas pelas Equações (28) e (29) [16].

$$M_A = \frac{EI}{L} \left[4 \left(\theta_{11} - \frac{M_A}{k_A} \right) + 2 \left(\theta_{21} - \frac{M_B}{k_B} \right) \right] \quad (28)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} \left[4 \left(\theta_{21} - \frac{M_B}{k_B} \right) + 2 \left(\theta_{11} - \frac{M_A}{k_A} \right) \right] \quad (29)$$

Ou simplifiadamente nas Equações (30) e (31).

$$\bar{M}_1 = \frac{EI}{L} (r_{ii}\theta_{11} + r_{ij}\theta_{21}) \quad (30)$$

$$\bar{M}_2 = \frac{EI}{L} (r_{ji}\theta_{11} + r_{jj}\theta_{21}) \quad (31)$$

Em que r_{ii} , r_{ij} , r_{ji} e r_{jj} são obtidos pelas Equações (32), (33), (34) e (35), respectivamente.

$$r_{ii} = \frac{1}{kr} \left(4 + \frac{12EI}{L_0 k_2} \right) \quad (32)$$

$$r_{ij} = \frac{2}{kr} \quad (33)$$

$$r_{ji} = \frac{1}{kr} \left(4 + \frac{12EI}{L_0 k_1} \right) \quad (34)$$

$$kr = \left(1 + \frac{4EI}{L_0 k_1} \right) \left(1 + \frac{4EI}{L_0 k_2} \right) - \left(\frac{4E^2 I^2}{L_0^2 k_1 k_2} \right) \quad (35)$$

A matriz de rigidez material $\mathbf{K}_M$ estabelecida na Equação (15) é alterada e fica definida conforme Equação (36).

$$\mathbf{K}_M = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & G_1 \frac{EI}{L^3} & 0 & -G_1 \frac{EI}{L^3} & G_1 \frac{EI}{L^3} & 0 \\ 0 & G_2 \frac{EI}{L^2} & r_{ii} \frac{EI}{L} & -G_2 \frac{EI}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -G_1 \frac{EI}{L^3} & -G_2 \frac{EI}{L^2} & 0 & G_1 \frac{EI}{L^3} & 0 \\ 0 & G_3 \frac{EI}{L^3} & r_{ij} \frac{EI}{L} & 0 & G_3 \frac{EI}{L^2} & r_{jj} \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \quad \text{SIMÉTRICO} \quad (36)$$

Na qual as constantes G_i , com $i = 1, 2$ e 3 , são dadas pelas Equações (37), (38) e (39), respectivamente.

$$G_1 = r_{ii} + 2r_{ij} + r_{jj} \quad (37)$$

$$G_2 = r_{ii} + r_{ij} \quad (38)$$

$$G_3 = r_{ij} + r_{jj} \quad (39)$$

Para uma adoção de uma ligação idealmente flexível, a rigidez se torna nula ($k_1, k_2 \rightarrow 0$), consequentemente $k_r \cong \infty$ e $r_{ii} = r_{ij} = r_{jj} \cong 0$. Já em uma ligação perfeitamente rígida, a rigidez é adotada de forma extremamente elevada ($k_1, k_2 \rightarrow \infty$), acarretando em $k_r = 1$, $r_{ii} = r_{jj} = 4$ e $r_{ij} = 2$.

2.3. Modelo não linear de ligação semirrígida

Segundo MEISTER [17] o método se baseia na ideia central de que ao reduzir ao máximo a soma dos quadrados das diferenças entre os valores reais e os valores estimados, obtém-se o melhor ajuste para a função de aproximação, ou seja, a estimativa ótima.

A partir dos pontos críticos que minimizam essa função, podem-se calcular os coeficientes dos termos da função de aproximação e esse procedimento é conhecido como Método dos Mínimos Quadrados para ajuste de curvas. Esse procedimento é detalhado a seguir, de acordo com a metodologia definida em [11]. Uma forma otimizada de encontrar a estimativa polinomial é por meio da soma dos quadrados dos resíduos, conforme exposta na Equação (40).

$$R = \sum_{i=1}^n (M_i - a_0 - a_1 \theta_{ri} - a_2 \theta_{ri}^2 - \dots - a_n \theta_{ri}^n)^2 \quad (40)$$

A minimização é feita ao zerar as derivadas parciais da função, conforme a Equação (41).

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} = 0; \quad i = 1, \dots, n \quad (41)$$

A Equação (41) equivale ao sistema de equações são descritos na Equação (42).

$$\begin{bmatrix} a_0 \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^0 + a_1 \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^1 + \dots + a_n \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^n \\ a_0 \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^1 + a_1 \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^2 + \dots + a_n \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^{n+1} \\ \vdots \\ a_0 \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^n + a_1 \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^{n+1} + \dots + a_n \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^0 M_i \\ \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^1 M_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^n M_i \end{bmatrix} \quad (42)$$

2.4. Solução do sistema de equações não lineares

A solução das equações não lineares, utilizando o MEF, consiste em determinar a condição de equilíbrio de uma estrutura que está sob ação de cargas aplicadas, sendo expressa matematicamente conforme a Equação (43) [18].

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{f}_r - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}^{(k-1)}) = 0 \quad (43)$$

Na qual $\mathbf{g}$ é o vetor de forças desequilibradas, $\mathbf{f}_r$ é o vetor de referência que caracteriza a direção da força externa, λ é o parâmetro de força e $\mathbf{f}_{int}$ é o vetor de forças internas. Aplicando o esquema iterativo de Newton-Raphson padrão na Equação (43), tem-se o problema estrutural não linear dada pela Equação (44).

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)} = \lambda^{(k)} \mathbf{f}_r - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}^{(k-1)}) \quad (44)$$

Os subíndices (k) e $(k-1)$ referem-se, respectivamente, às iterações corrente e anterior e $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural. Os parâmetros totais de força (λ) e do vetor de coordenadas nodais ($\mathbf{u}$) no passo de força $(t + \Delta t)$ e iteração k são atualizados pelas Equações (45) e (46), respectivamente:

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)} \quad (45)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)} \quad (46)$$

Da Equação (44) os deslocamentos nodais iterativos podem ser decompostos em duas parcelas conforme mostrado na Equação (47).

$$\delta \mathbf{u}^{(k)} = \delta \mathbf{u}_g^{(k)} + \delta \lambda^{(k)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)} \quad (47)$$

Na qual $\delta \lambda^{(k)}$ é o subincremento do parâmetro de força que deve ser avaliado ao longo do ciclo iterativo. Outra forma de se obter o subincremento do parâmetro de força é por meio da técnica de Fluxo Normal. Nessa formulação, o equilíbrio entre as forças internas e as externas é alcançado realizando correções do processo iterativo ao longo do caminho normal às curvas conforme mostrado na Equação (48) [18].

$$\delta \mathbf{u}^{(k)} = \delta \mathbf{u}_g^{(k)} + \delta \lambda^{(k)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)} - \frac{(\delta \mathbf{u}_g^{(k)} \delta \lambda^{(k)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)})^T \delta \mathbf{u}_r^{(k)}}{(\delta \mathbf{u}_r^{(k)})^T} \delta \mathbf{u}_r^{(k)} \quad (48)$$

2.5. Ciclo de iterações – método de Potra-Pták

Na procura de uma melhor convergência do processo iterativo e um melhor índice de eficiência do que o obtido por meio do método de Newton-Raphson padrão ou modificado, neste trabalho é utilizado o procedimento incremental-iterativo baseado no método de POTRA e PTÁK [13], o qual foi desenvolvido por SOUZA *et al.* [19]. Esse procedimento tem dois passos no ciclo iterativo sendo descrito pela Equação (49).

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)}) \delta \mathbf{u}^{(k)} = \delta \lambda_1^{(k)} \mathbf{f}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k-1)}) + \delta \lambda_2^{(k)} \mathbf{f}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k-1)}) \quad (49)$$

Assumindo que a $[\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})]^{-1}$ exista, os vetores $\mathbf{y}^{(k)}$ e $\mathbf{u}^{(k)}$ são obtidos pelas Equações (50) e (51), respectivamente.

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})]^{-1} (\delta\lambda_1^{(k)} \mathbf{f}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k-1)})) \quad (50)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})]^{-1} (\delta\lambda_2^{(k)} \mathbf{f}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k)})) \quad (51)$$

O deslocamento residual $\delta\mathbf{u}^{(k)}$ é obtido segundo a Equação (52).

$$\delta\mathbf{u}^{(k)} = \delta\mathbf{u}_1^{(k)} + \delta\mathbf{u}_2^{(k)} \quad (52)$$

E as parcelas $\delta\mathbf{u}_1^{(k)}$ e $\delta\mathbf{u}_2^{(k)}$ são descritas respectivamente pelas Equações (53) e (54).

$$\delta\mathbf{u}_1^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})]^{-1} (\delta\lambda_1^{(k)} \mathbf{f}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k-1)})) = \delta\lambda_1^{(k)} \delta\mathbf{u}_r^{(k)} + \delta\mathbf{u}_{gu}^{(k)} \quad (53)$$

$$\delta\mathbf{u}_2^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})]^{-1} (\delta\lambda_2^{(k)} \mathbf{f}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k-1)})) = \delta\lambda_2^{(k)} \delta\mathbf{u}_r^{(k)} + \delta\mathbf{u}_{gy}^{(k)} \quad (54)$$

2.6. Incremento de comprimento de arco linear

A seguinte relação proposta por [14], [20] e [21] sugeriram as estratégias de incremento automático de carga e de outros parâmetros (deslocamento, comprimento de arco, trabalho externo) baseadas no emprego da relação estabelecida pela Equação (55).

$$\left(\frac{I_d}{I} \right)^\alpha \quad (55)$$

Em que I_d é o número de iterações desejadas para a convergência do processo iterativo corrente, especificado pelo usuário e I é o número de iterações que foram necessárias para que o passo de carga anterior convergisse. Conforme sugestão de [22], adota-se $\alpha = 1/2$. O parâmetro comprimento de arco Δl pode ser usado como parâmetro de controle no passo de carga corrente Equação (56).

$$\Delta l = \Delta l_{p,a} \left(\frac{I_d}{I} \right)^\alpha \quad (56)$$

Na qual $\Delta l_{p,a}$ representa os incrementos do comprimento de arco no passo de carga anterior. Assim, uma vez especificado o valor de $\Delta l_{p,a}$, a técnica fornecida na Equação (56) pode levar a um cálculo automático dos incrementos iniciais nos passos de cargas seguintes, por meio da utilização da Equação (55) e da condição de restrição escrita para a solução incremental inicial descrita pela Equação (57).

$$(\Delta\mathbf{u}^{(0)})^T \Delta\mathbf{u}^{(0)} = \Delta l^2 \quad (57)$$

Pode-se obter a expressão do incremento inicial do parâmetro de carga Equação (58).

$$\Delta\lambda^{(0)} = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{(\delta\mathbf{u}_r)^T \delta\mathbf{u}_r}} \quad (58)$$

2.7. Estratégia de iteração de comprimento de arco cilíndrico

Para o comprimento de arco cilíndrico, CRISFIELD [14] propôs que, a cada iteração que a Equação (59) fosse satisfeita.

$$(\Delta\mathbf{u}^{(k)})^T \Delta\mathbf{u}^{(k)} = \Delta l^2 \quad (59)$$

Na qual a equação quadrática em $\delta\lambda$ é descrita na Equação (60)

$$A (\delta\lambda^{(k)})^2 + B\delta\lambda^{(k)} + C = 0 \quad (60)$$

em que os coeficientes A, B e C são definidos pelas Equações (61), (62) e (63), respectivamente.

$$A = \left(\delta \mathbf{u}_r^{(k)} \right)^T \delta \mathbf{u}_r^{(k)} \quad (61)$$

$$B = 2 \left(\delta \mathbf{u}_r^{(k)} \right)^T \left(\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^{(k)} \right) \quad (62)$$

$$C = \left(\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^{(k)} \right)^T \left(\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^{(k)} \right) - \Delta l^2 \quad (63)$$

Com a solução de (62), chega-se a dois valores de $\delta\lambda$ ($\delta\lambda_1$ e $\delta\lambda_2$), de tal forma que se deve escolher entre as soluções apresentadas nas Equações (64) e (65).

$$\Delta \mathbf{u}_1^{(k)} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)} \quad (64)$$

$$\Delta \mathbf{u}_2^{(k)} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^{(k)} + \delta \mathbf{u}_2^{(k)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)} \quad (65)$$

A que mais se aproxima da solução incremental da iteração anterior, $\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$. Essa escolha deve prevenir um possível retorno, o que faria a solução regredir ao longo do caminho já calculado. Um procedimento bastante simples a ser seguido e usado neste trabalho, consiste em achar o menor ângulo entre $\Delta \mathbf{u}^{(k)}$ e $\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$, isso equivale a achar o máximo cosseno do ângulo (θ) obtido pela Equação (66).

$$\cos \theta_{1,2} = \frac{\left(\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} \right)^T \Delta \mathbf{u}^{(k)}}{\Delta l^2} = \frac{\left(\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} \right)^T \left(\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^{(k)} \right)}{\Delta l^2} + \delta \lambda_{1,2}^{(k)} \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}}{\Delta l^2} \quad (66)$$

A Equação (66) poderá ter raízes imaginárias, se $B^2 - 4AC < 0$. Isso ocorrerá quando o incremento inicial do parâmetro de carga for muito grande, ou se a estrutura exibir múltiplos caminhos de equilíbrio em torno de um ponto [23].

2.8. Critério de convergência

Para uma análise iterativa, a solução é encontrada de maneira aproximada, ou seja, não é exata. Portanto, alguns limites de tolerância devem ser fixados para sua interrupção. O processo iterativo se encerra, indicando uma nova posição de equilíbrio para a estrutura em análise, quando um dos critérios de convergência apresentados a seguir se tornar verdadeiro.

2.8.1. Critério 1

O primeiro critério de convergência adotado para cada passo de carga é expresso pela norma da força residual e da força total aplicada dada na Equação (67)

$$\|\mathbf{g}\| \leq \zeta_1 \|\mathbf{f}_r\| \quad (67)$$

Na qual $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana e ζ_1 é a tolerância fornecida pelo usuário.

2.8.2. Critério 2

O segundo critério de convergência obedece a relações de deslocamentos descritas na Equação (68).

$$\|\delta \mathbf{u}^{(k)}\| \leq \zeta_2 \|\Delta \mathbf{u}^{(k)}\| \quad (68)$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são apresentados quatro exemplos numéricos encontrados na literatura sendo: uma viga em balanço, dois pórticos com dois andares e com diferentes tipos de apoio e um pórtico com 7 andares. Para a análise da semirrigidez, curvas momento-rotação e as equações encontradas por intermédio do método dos mínimos quadrados são expostos. O peso próprio das estruturas é desprezado nas análises. As simulações foram efetuadas em linguagem Python na IDE Spyder versão 5.1.5, em um notebook com processador Intel(R) Core (TM) i5 – 6200U, CPU @ 2.30GHz 2.40 GHz e com 4 GB de memória RAM.

3.1. Viga em balanço com carga concentrada

No primeiro exemplo é estudado uma viga em balanço com apoio semirrígido e submetida a uma com carga pontual na extremidade livre. A estrutura é discretizada em 4 elementos de viga com rigidez $K = 1 \times 10^{10}$. O momento último $M_u = EI/L$, ângulo de rotação inicial $\phi_0 = 1$, módulo de elasticidade $E = 210 \times 10^6$ (kN/m²), comprimento $L = 3,2$ (m), área $A = 0,01$ (m²) e inércia $I = 1 \times 10^{-4}/12$ (m⁴). A estrutura juntamente com a curva momento-rotação que descreve o seu comportamento é mostrado na Figura 3. Essa viga foi estudada por ARISTIZÁBAL-OCCHOA [24] e VAN HAI *et al.* [25]. Para esse modelo, a curva momento-rotação é descrita pelo polinômio mostrado na Tabela 1.

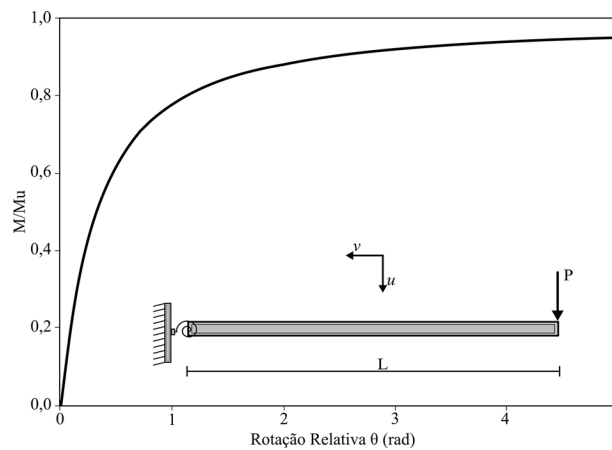


Figura 3: Curva momento-rotação e viga em estudo. Fonte: Adaptada de VAN HAI *et al.* [25].

Tabela 1: Polinômio interpolador obtido pelo método dos mínimos quadrados.

POLINÔMIO INTERPOLADOR
$M = -0,07863 \theta_r^8 + 2,054 \theta_r^7 - 22,64 \theta_r^6 + 137 \theta_r^5 - 497,3 \theta_r^4 + 1109 \theta_r^3 - 1504 \theta_r^2 + 1200 \theta_r - 4,96$

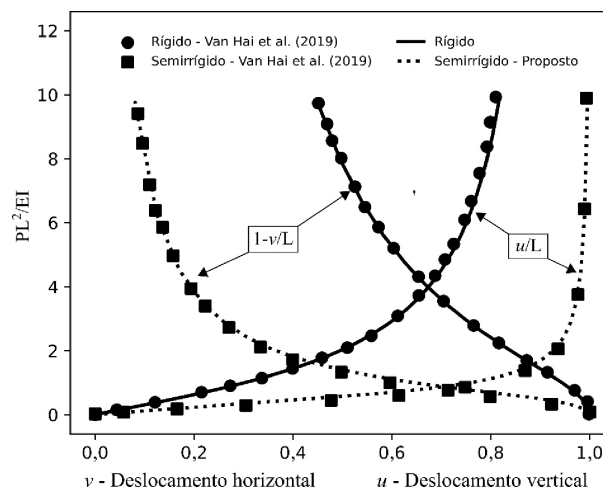


Figura 4: Curva carga-deslocamento viga em balanço.

Tabela 2: Resultados numéricos viga em balanço.

CURVAS	kt	Np	kt/Np	t(s)
Rígido (u/l)	46	17	2,7059	0,132
Semirrígido (u/l)	85	27	3,1481	0,214
Rígido 1 – (v/l)	46	17	2,7059	0,126
Semirrígida – Proposta 1 – (v/l)	87	27	3,1481	0,187

Os parâmetros de entrada considerados para o método de solução de Potrá Ptak são: comprimento de arco inicial $\Delta l^{(0)} = 0,2$; número máximo de iterações no passo de carga $K_{\max} = 100$; tolerância $\zeta_{1-2} = 1 \times 10^{-8}$ e incremento de força inicial $P = -1$ N. Na Figura 4 são mostrados os resultados obtidos, com u sendo o deslocamento horizontal e v , o vertical.

Na Tabela 2 são apresentados os resultados numéricos das simulações efetuadas, quanto aos números de iterações acumuladas (kt), incrementos de força até a convergência do método de solução (Np), número médio de iterações por passo (kt/Np) e tempo de processamento t (em segundos).

Quando comparados os deslocamentos obtidos com ligações rígidas e semirrígidas, nota-se um aumento considerável. Para o deslocamento vertical (u) a diferença foi de cerca de 21,76%, saindo de um deslocamento de 0,818 m para a ligação rígida e alcançando o valor de 0,998 m com a vinculação semirrígida. Enquanto, para o deslocamento horizontal (v) são alcançados os valores de 0,55 m para a ligação rígida e 0,9195 m para a vinculação semirrígida, um aumento de cerca de 67,18%.

3.2. Pórtico de 2 andares

A Figura 5 mostra dois pórticos de dois andares e um vão, com base biapoada Figura 5a e engastada Figura 5b. Esses pórticos foram analisados previamente por PINHEIRO e SILVEIRA [26]. As vigas e os pilares são constituídos, respectivamente, pelos perfis W 360 $\times$ 72 e W 310 $\times$ 143. O carregamento é representado por cargas verticais concentradas (P) aplicadas nos pilares e por duas cargas horizontais, de 0,002P aplicada no primeiro andar e outra de 0,001P aplicada no segundo andar. O módulo de elasticidade longitudinal é igual a 205GPa.

Para considerar as ligações não lineares, [26] utilizaram curva momento-rotação de quatro tipos de ligações, sendo uma ligação com cantoneira simples na alma (A), uma ligação com cantoneiras de topo e assento (B), uma ligação com placa de extremidade ajustada (C) e uma ligação com placa de extremidade estendida (D), conforme mostrado na Figura 6. Segundo CHEN e LUI [5], a ligação A foi testada por [27], enquanto B foi ensaiada por [28]. Já as conexões C e D foram testadas por [29] e [30], respectivamente.

Para cada curva momento-rotação apresentada na Figura 6, obteve-se o polinômio interpolador para cada tipo de ligação, conforme exposto na Tabela 3.

Os parâmetros de entrada considerados para o método de solução são: $\Delta l^{(0)} = 0,5$; $K_{\max} = 100$; tolerância $\zeta_{1-2} = 1 \times 10^{-8}$; $P = -1$ N. Para cada um dos caminhos de equilíbrio obtidos, utilizou-se o critério de instabilidade para a verificação e parada da análise de cada uma das análises. Os resultados obtidos foram confrontados

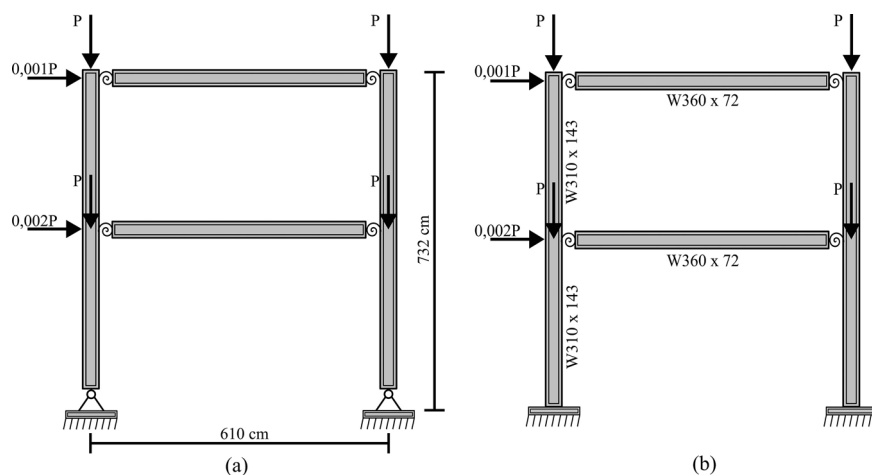


Figura 5: Geometria e carregamento da estrutura. Fonte: Adaptado de PINHEIRO e SILVEIRA [26].

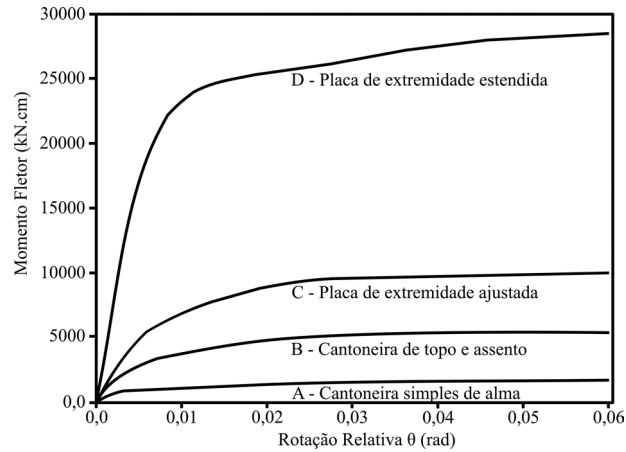


Figura 6: Curvas momento-rotação. Fonte: Adaptado de PINHEIRO e SILVEIRA [26].

Tabela 3: Polinômio interpolador para cada curva.

CURVA	POLINÔMIO INTERPOLADOR
A	$M = -2,612 \times 10^{16} \theta_r^8 + 5,949 \times 10^{15} \theta_r^7 - 5,532 \times 10^{14} \theta_r^6 + 2,711 \times 10^{13} \theta_r^5 - 7,545 \times 10^{11} \theta_r^4 + 1,198 \times 10^{10} \theta_r^3 - 1,037 \times 10^8 \theta_r^2 + 4,694 \times 10^5 \theta_r - 2,794 \times 10^{-9}$
B	$M = -8,563 \times 10^{15} \theta_r^8 + 2,368 \times 10^{15} \theta_r^7 - 2,732 \times 10^{14} \theta_r^6 + 1,697 \times 10^{13} \theta_r^5 - 6,122 \times 10^{11} \theta_r^4 + 1,29 \times 10^{10} \theta_r^3 - 1,552 \times 10^8 \theta_r^2 + 1,092 \times 10^6 \theta_r - 8,225$
C	$M = 2,869 \times 10^{15} \theta_r^8 - 4,841 \times 10^{14} \theta_r^7 + 1,797 \times 10^{13} \theta_r^6 + 1,398 \times 10^{12} \theta_r^5 - 1,507 \times 10^{11} \theta_r^4 + 5,763 \times 10^9 \theta_r^3 - 1,165 \times 10^8 \theta_r^2 + 1,418 \times 10^6 \theta_r - 75,92$
D	$M = 7,243 \times 10^{16} \theta_r^8 - 1,724 \times 10^{16} \theta_r^7 + 1,646 \times 10^{15} \theta_r^6 - 7,927 \times 10^{13} \theta_r^5 + 1,928 \times 10^{12} \theta_r^4 - 1,688 \times 10^{10} \theta_r^3 - 1,789 \times 10^8 \theta_r^2 + 4,594 \times 10^6 \theta_r - 419,7$

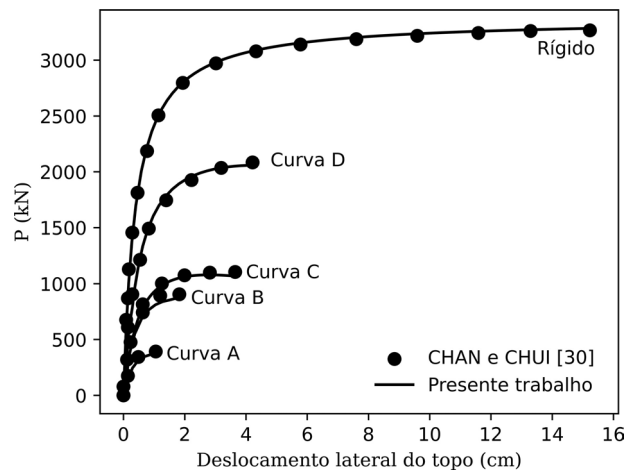


Figura 7: Curvas carga-deslocamento para o pórtico com base biapoçada.

com [5] e [31] de modo a possibilitar a verificação da intensidade do carregamento e deslocamento atuante. As trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes curvas que descrevem o comportamento da ligação conforme a Tabela 3 e os resultados numéricos para o pórtico biapoçado são expostos na Figura 7 e nas Tabelas 4 e 5, enquanto, para o pórtico engastado são demonstrados na Figura 8 e nas Tabelas 6 e 7.

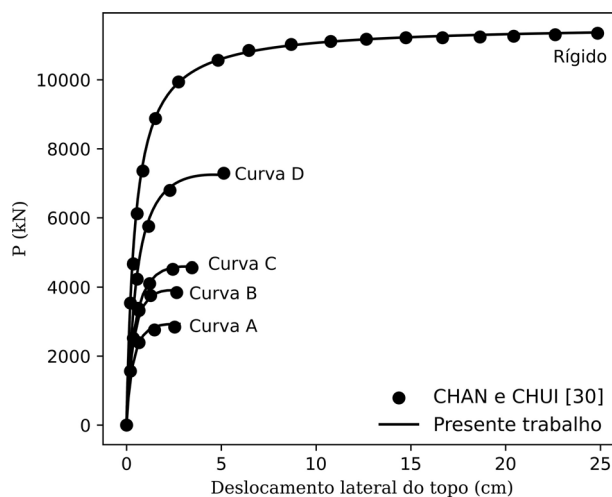
Para os pórticos a) e b) da Figura 5, um fator de grande relevância a ser considerado, são os diferentes comportamentos apresentados pelas conexões. A ligação de cantoneira simples de alma representa a conexão com maior flexibilidade, ou seja, para um mesmo valor específico de momento, uma maior rotação e um menor valor de carga é suportado. Em contraponto, a conexão de placa de extremidade estendida representa uma conexão

Tabela 4: Carga limite de estabilidade para o pórtico com base biapoçada.

CURVAS	CHEN e LUI [5]	CHAN e CHUI [31]	TRABALHO ATUAL
A	400,3	395,9	396,08
B	911,9	907,4	899,5
C	1076,5	1107,6	1096,35
D	2112,9	2121,8	2119,82
Ligação Rígida	3225,0	3318,4	3302,48

Tabela 5: Resultados numéricos para o pórtico com base biapoçada.

CURVAS	kt	Np	Kt/Np	t(s)
A	28	9	3,111	0,5311
B	37	12	3,083	0,7342
C	55	17	3,235	0,8762
D	72	22	3,273	1,4746
Ligação Rígida	181	89	2,034	2,9055

**Figura 8:** Curvas carga - deslocamento para o pórtico com base engastada.**Tabela 6:** Carga limite de estabilidade para o pórtico com base engastada.

CURVAS	CHEN E LUI [5]	CHAN E CHUI [31]	TRABALHO ATUAL
A	2802,4	2838	2861,87
B	3825,5	3892,2	3857,27
C	4581,7	4617,3	4628,07
D	7228,4	7330,7	7297,18
Ligação Rígida	11254	11387,5	11400,39

Tabela 7: Resultados numéricos do pórtico com base engastada.

CURVAS	kt	Np	Kt/Np	t(s)
A	18	5	3,6	0,2284
B	34	9	3,777	0,7889
C	55	17	3,235	0,8762
D	120	23	5,217	1,4746
Ligação Rígida	135	63	2,143	1,6725

maior rigidez, ou seja, para um valor específico de rotação, um valor menor de momento é transmitido e um maior nível de carga é suportado por essa conexão. Esse tipo análise é de suma importância no auxílio da escolha do tipo da ligação a ser adotada, como exposto nas Tabelas 4 e 6 percebe-se que para ligações mais flexíveis as cargas limites são menores.

Outro fator a ser levado em consideração refere-se ao tipo de apoio utilizado. Nos casos em estudo foi adotado engastado e biapoioado. Nota-se que a escolha pelo apoio engastado eleva consideravelmente o valor da carga crítica. Portanto, conclui-se que o uso de apoios fixos e ligações mais rígidas seria uma forma de aumentar o valor da carga limite e diminuir o deslocamento horizontal.

3.3. Pórtico de 7 andares

O último sistema estrutural considerado neste artigo é o pórtico metálico de sete andares e um vão, conforme ilustrado na Figura 9. Essa estrutura foi estudada inicialmente por NEFOVSKA-DANILOVIĆ e SEKULOVIĆ [32].

Dois tipos de comportamento são estudados, o primeiro com e ligação rígida e o segundo com 2 tipos de ligações semirrígidas utilizando o modelo linear, em que a rigidez é fixa durante toda a análise e assume os valores de $k = 2,0 \times 10^5$ kNm/rad, para o Modelo Linear – A e $k = 1,243 \times 10^4$ kNm/rad para o Modelo linear – B. Enquanto o modelo não linear proposto nesse trabalho é descrito pelas curvas A e B, conforme definido na Tabela 8. O módulo de elasticidade $E = 205$ GPa, o carregamento, propriedades e curva que correspondem as ligações são mostradas na Figura 9. Para os elementos de viga a rigidez é adotada como $k = 1 \times 10^{10}$ kNm/rad. Os parâmetros de entrada considerados para o método de solução são $\Delta l^{(0)} = 0,05$; $K_{\max} = 100$; $N_d = 5$; tolerância = $1,0 \times 10^{-8}$; $P = -1$ N.

Para cada tipo de ligação e modelo utilizado são apresentados os resultados de deslocamento horizontal no topo da estrutura são descritos na Figura 10 em função da do nível de carga aplicada. E, portanto, validando o modelo proposto implementado de forma a descrever o fenômeno físico da estrutura em tais condições.

Na Tabela 9 são comparados os resultados obtidos para carga limite de estabilidade para cada tipo de ligação e modelo. Já na Tabela 10 são apresentados para a técnica de continuação de comprimento de arco cilíndrico os resultados numéricos das simulações, assim como analisado nas Tabelas 5 e 7.

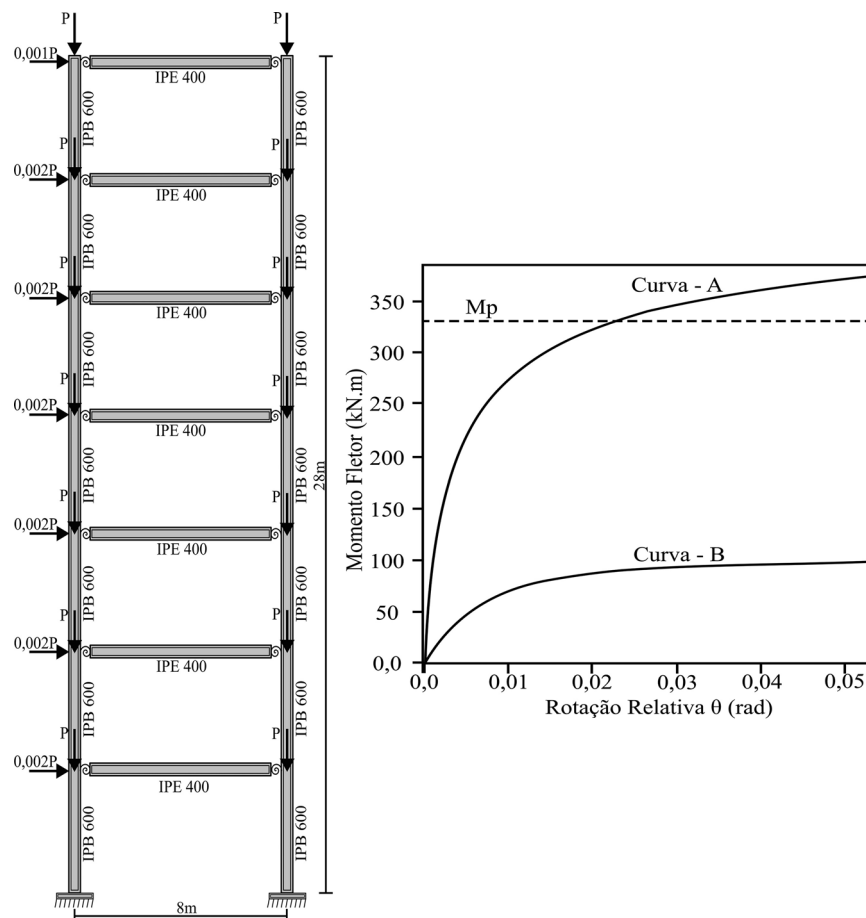
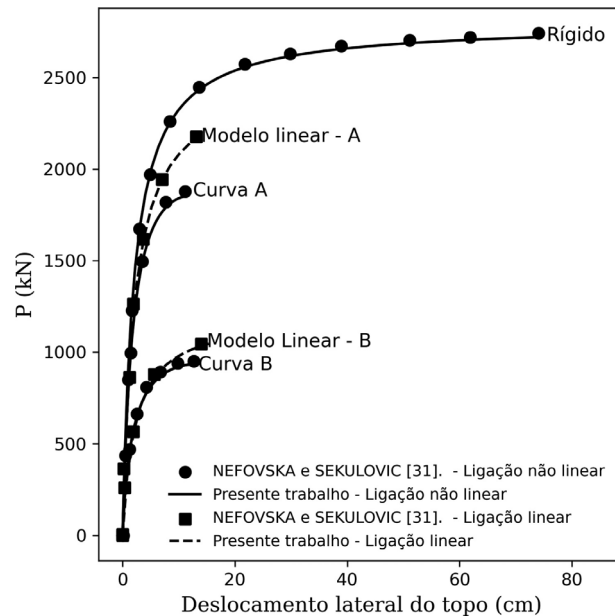


Figura 9: Modelo estrutural do pórtico de sete andares e curvas momento-rotação.

Tabela 8: Polinômio interpolador para cada curva.

CURVA	POLINÔMIO INTERPOLADOR
A	$M = -5,165 \times 10^{15} \theta_r^8 + 1,109 \times 10^{15} \theta_r^7 - 9,858 \times 10^{13} \theta_r^6 + 4,694 \times 10^{12} \theta_r^5 - 1,294 \times 10^{11} \theta_r^4 + 2,096 \times 10^9 \theta_r^3 - 1,951 \times 10^7 \theta_r^2 + 1,039 \times 10^5 \theta_r + 3,463$
B	$M = 1,523 \times 10^{14} \theta_r^8 - 3,267 \times 10^{13} \theta_r^7 + 2,829 \times 10^{12} \theta_r^6 - 1,238 \times 10^{11} \theta_r^5 + 2,664 \times 10^9 \theta_r^4 - 1,323 \times 10^7 \theta_r^3 - 5,875 \times 10^5 \theta_r^2 + 1,274 \times 10^4 \theta_r - 0,2053$

**Figura 10:** Curvas carga- deslocamento para o pórtico de sete andares.**Tabela 9:** Carga limite de estabilidade para o pórtico de 7 andares.

CURVAS	NEFOVSKA-DANILOVIĆ E SEKULOVIĆ [31]	TRABALHO ATUAL
Curva A	1878,33	1853,34
Modelo linear – A	2177,75	2175,89
Curva B	940,24	937,79
Modelo linear – B	1044,07	1044,04
Ligação Rígida	2742,43	2722,95

Tabela 10: Resultados numéricos do pórtico de 7 andares.

CURVAS	kt	Np	kt/Np	t(s)
Rígido	276	66	4,1818	13,5149
Curva A	58	11	5,273	2,7874
Modelo linear – A	39	11	3,5454	1,6832
Curva B	40	9	4,444	2,7495
Modelo linear – B	32	9	3,555	1,5738

Para o pórtico de sete andares é comparado a metodologia linear, em que a rigidez se fixa durante toda a análise e a não linear, na qual a rigidez varia a cada nova iteração e nesse trabalho foi simulada através da adaptação do método dos mínimos quadrados. Nota-se que na fase inicial do carregamento, ambas as tratativas apresentam comportamentos similares, entretanto, com o aumento do carregamento os resultados obtidos pela metodologia não linear apresentam maiores deslocamentos para menores níveis de carregamento, conforme observado na Figura 10 e Tabela 9, esse fato se deve pelo início da deterioração da rigidez da ligação.

4. CONCLUSÃO

Neste artigo é proposta uma forma de aplicação do método dos mínimos quadrados para a simulação do comportamento semirrígido da ligação. Esse comportamento, é simulado diretamente, através da extração dos pontos que formam as curvas momento-rotação e a obtenção de equações que interpolam o comportamento momento-rotação. Através dessas expressões foi possível obter a rigidez rotacional durante toda a análise. Quatro estruturas são estudadas, com diferentes tipos de curvas momento-rotação para simular o comportamento de distintas conexões.

Conforme observado, a metodologia implementada se mostrou eficiente e foi capaz de prever o comportamento da ligação para o crescente nível de carregamento, outrossim, a técnica desenvolvida é de fácil adaptação e formulação semirrígidas. Em relação ao método de solução, como já relatado em trabalhos anteriores como o de SOUZA [33] e SOARES [34] a técnica de POTRA-PTÁK se mostra superior ao clássico método de Newton Raphson tanto no número de iterações, quanto no tempo de processamento. Outra metodologia aplicada nesse artigo foi a técnica de comprimento de arco cilíndrico, que se mostrou capaz de obter com eficiência as trajetórias de equilíbrio. Por fim, quando confrontado com resultados obtidos na literatura a metodologia apresentou boa acurácia, representando fielmente.

Como propostas para implementações futuras, sugerem-se: a consideração da não linearidade física dos materiais que constituem as vigas e os pilares da estrutura (modelos constitutivos elastoplásticos) e a introdução do efeito dinâmico da estrutura.

5. AGRADECIMENTOS

Este estudo foi financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código financeiro 001.

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] GALVÃO, A.S., “*Instabilidade estática e dinâmica de pórticos planos com ligações semi-rígidas*,” Tese de D.Sc., Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.
- [2] BATELO, E.A.P., “*Análise dinâmica avançada de estruturas de aço sob cargas extremas*,” Tese de M.Sc., Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais, 2014.
- [3] RICHARD, R., ABBOTT, B., “Versatile elastic-plastic stress-strain formula,” *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 101, n. 4, pp. 511–515, Ago. 1975. doi: <http://dx.doi.org/10.1061/JMCEA3.0002047>.
- [4] COLSON, A., LOUVEAU, J.M., “Connections incidence on the inelastic behavior of steel structures”, In: *Proceedings of the Euromech Colloquium*, Dordrecht, vol. 174, 1983.
- [5] CHEN, W.-F., LUI, E., *Stability design of steel frames*, London, Boca Raton, 1991.
- [6] AHMED, A., “Prediction of moment-rotation characteristic of top- and seat-angle bolted connection incorporating prying action”, *International Journal of Advanced Structural Engineering*, v. 9, n. 1, pp. 79–93, Fev. 2017. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s40091-017-0150-4>.
- [7] ZHOU, G., AN, Y., LI, D., *et al.*, “Analytical model of moment-rotation relation for steel beam to CFST column connections with bidirectional bolts”, *Engineering Structures*, v. 196, pp. 109374, 2019. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109374>.
- [8] ADEOTI, G.O., HOUEHANOU, E.C., MA, H., *et al.*, “Review on Aluminum and steel semi-rigid connections behavior design model”, *Civil Engineering and Architecture*, v. 9, n. 1, pp. 184–205, Jan. 2021. doi: <http://dx.doi.org/10.13189/cea.2021.090116>.
- [9] TRAN, V.-L., KIM, J.-K., “Revealing the nonlinear behavior of steel flush endplate connections using ANN-based hybrid models”, *Journal of Building Engineering*, v. 57, pp. 104878, 2022. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jobbe.2022.104878>.
- [10] SOUZA, L.A.F., SOARES, A.L., KAWAMOTO, R.Y.M., *et al.*, “Modelo numérico-computacional de ligação semirrígida baseado na Mecânica do Dano”, *Matéria (Rio de Janeiro)*, v. 27, n. 2, pp. 1–20, Mar. 2022. doi: <http://dx.doi.org/10.1590/1517-7076-rmat-2021-45452>.
- [11] DATTA, B.N., *Numerical linear algebra and applications*, Brooks/Cole Publishing Company, USA, 1995.
- [12] YAW, L., *2D corotational beam formulation*, Walla Walla University, USA, 2009.
- [13] POTRA, F., PTÁK, V., *Nondiscrete induction and iterative processes*, Pitman Advanced Pub. Program, Boston, 1984.

- [14] CRISFIELD, M.A., “A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through”, *Computers & Structures*, v. 13, n. 1–3, pp. 55–62, Jun. 1981. [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90108-5](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949(81)90108-5).
- [15] CRISFIELD, M.A., *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Volume 1: *Essentials*. John Wiley & Sons Ltda, New York, 1991.
- [16] DEGERTEKIN, S.O., HAYALIOGLU, M.S., “Design of non-linear semi-rigid steel frames with semi-rigid column bases”, *Electronic Journal of Structural Engineering*, v. 4, p. 1–16, 2004. doi: <https://doi.org/10.56748/ejse.437>.
- [17] MEISTER, D., “Aplicação do método dos mínimos quadrados na estimação de parâmetros do modelo de um transformador”, Tese de M.Sc., Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2006.
- [18] MAXIMIANO, D.P., SILVA, A.R.D., SILVEIRA, R.A.M., “Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches Rem”, *Revista Escola de Minas*, v. 67, n. 2, pp. 143–150, 2014. doi: <http://dx.doi.org/10.1590/S0370-44672014000200003>.
- [19] SOUZA, L.A.F., CASTELANI, E.V., SHIRABAYASHI, W.V.I., “Algoritmo baseado no método de potráptak para a solução não linear de treliças espaciais”, *Revista Tecnológica*, v. 26, pp. 103–120, 2017. doi: <http://dx.doi.org/10.4025/revtecnol.v26i0.37297>.
- [20] RAMM, E., “Strategies for tracing the non-linear response near limit-points”, In: Wunderlich, W., Stein, E., Bathe, K.J. (eds), *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*, Springer Verlag, Berlin, 1981, pp. 63–89. doi: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-81589-8_5.
- [21] RAMM, E., “The riks/wempner approach an extension of displacement control method in non-linear analysis”, *Non-linear computational mechanics*, Pineridge, Swansea, 1982, pp. 63–86.
- [22] RIKS, E., “The application of Newton’s method to the problem of elastic stability”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 39, n. 4, pp. 1060–1066, 1972. doi: <http://dx.doi.org/10.1115/1.3422829>.
- [23] MEEK, J., TAN, H.S., “Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 47, n. 3, pp. 261–282, Dez. 1984. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(84\)90079-3](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(84)90079-3).
- [24] ARISTIZÁBAL-OCHOA, J.D., “Large deflection stability of slender beam-columns with semirigid connections: Elastica approach”, *Journal of Engineering Mechanics-Proceedings of the ASCE*, v. 130, n. 3, pp. 274–282, 2004. doi: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2004\)130:3\(274\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2004)130:3(274)).
- [25] VAN HAI, N., BINH, L.V., NGHIEM, D.N.T., *et al.*, “Large displacement elastic static analysis of semi-rigid planar steel frames by corotational Euler-Bernoulli finite element”, *Journal of Science and Technology in Civil Engineering*, v. 13, n. 2, pp. 24–32, 2019.
- [26] PINHEIRO, L., SILVEIRA, R.A.M., “Computational procedures for nonlinear analysis of frames with semi-rigid connections”, *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 2, pp. 339–367, 2005.
- [27] AZIZINAMINI, A., BRADBURN, J.H., RADZIMINSKI, J.B., “Initial stiffness of semi-rigid steel beam-to-column connections”, *Journal of Constructional Steel Research*, v. 8, pp. 71–90, 1987. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0143-974X\(87\)90054-X](http://dx.doi.org/10.1016/0143-974X(87)90054-X).
- [28] AZIZINAMINI, A., BRADBURN, J.H., RADZIMINSKI, J.B., *Static and cyclic behavior of semi-rigid steel beam-column connections*, University of South Carolina, Columbia, SC, 1985.
- [29] OSTRANDER, J.R., “An experimental investigation of end plate connections,” D.Sc. Thesis, University of Saskatchewan, Saskatoon, SK, Canadá, 1970.
- [30] JOHNSTONE, N.D., WALPOLE, W.R., *Bolted end plate beam to column connections under earthquake type loading*, Department of Civil Engineering, University of Canterbury, Nova Zelândia, 1981.
- [31] CHAN, S.L., CHUI, P.P.T., *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*, Elsevier, USA, 2000.
- [32] NEFOVSKA-DANILOVIĆ, M., SEKULOVIĆ, M., “Static inelastic analysis of steel frames with flexible connections”, *Theoretical and Applied Mechanics*, v. 31, n. 2, pp. 101–134, 2004. doi: <http://dx.doi.org/10.2298/TAM0402101N>.
- [33] SOUZA, L.A.F., CASTELANI, E.V., SHIRABAYASHI, W.V.I., *et al.*, “Métodos iterativos de terceira e quarta ordem associados à técnica de comprimento de arco linear”, *Ciência & Engenharia*, v. 26, n. 1, pp. 39–49, Out. 2017. doi: <http://dx.doi.org/10.14393/19834071.v26.n1.2017.38327>.
- [34] SOARES, A.L., “Estudo de modelos não lineares de ligação viga-coluna para pórticos planos”, Tese de M.Sc., Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2021.